*М.А. Родичев*

**Оптимизация алгоритмов в программировании при помощи анализа задачи на примере магического квадрата**

*В данном материале автор демонстрирует, как изменение подхода к поставленной математической задаче, способствует её скорейшему решению.*

**Введение**

Д

анная работа была бы невозможна без математиков, жаждущих красоты в своем понимании. Одной из таких красот является магический квадрат, многим знакомый еще со школьной скамьи, это квадрат размерностью n x n, в котором числа не повторяются, а их суммы по столбцам и строкам равны.  
Такие задачки даются детям во втором классе, дабы развить у них мышление, но, как понимаете, это слишком простая задача и её усложнили, добавив условие того, что числа возводятся в квадрат.  
С одним из таких квадратов я встретился у Numberphile. Тогда и возникла идея найти еще такие квадраты, используя ЭВМ.

**Методика решения в «лоб»**

Данная методика тем и хороша, что думать не требуется. Её предложило подавляющее большинство людей в комментариях под видео Numberphile об этом квадрате. Её суть заключается в простом переборе всех значений и ожидания, когда условия данной нам задачи выполнятся. Ведь не мы считаем, а машина, а значит можно пренебречь тем, что это около 100^9 вычислений, даже используя метод параллельных вычислений, мы получаем примерно 5 000 дней на перебор всех вариантов для магического квадрата 3х3, что довольно-таки долго (данная величина дней рассчитана на примере вычислительной мощности процессора Ryzen 5 5300U). Это количество дней заставляет задуматься, а как можно эту задачу упростить, чтобы перебор был более быстрым, раз все возможности техники мы использовали (параллельный перебор).

**Последовательный анализ задачи**

Что такое магический квадрат? 9 чисел, расположенных в определенном порядке по строкам и столбцам? Да, это так, но, если принять во внимание, что каждая строка и столбец выдают одинаковую сумму при возведении их чисел в квадрат, можно прийти к умозаключению, что магический квадрат — это не просто 9 чисел, это 6 троек чисел (3 по строчкам, 3 по столбцам) выдающих одинаковое значение. Таким образом, нам требуется найти такую сумму, которая может быть «закодирована» 6-ью и более тройками чисел, а не просто перебирать все 9 «позиций» магического квадрата. Что это значит для нас? Это означает, что потребуется перебирать только 3 позиции и «записывать» те тройки, которые выдают одинаковые суммы, то есть мы получаем 100^3 вычислений, что уже куда более малая величина.  
Вроде бы все отлично, но не стоит забывать про еще одно правило: «Числа не повторяются», а в нашем переборе возможно такое:

62 + 622 + 872  = 11 449  
622 + 62 + 872  = 11 449  
872 + 622 + 62  = 11 449

И так далее, думаю, будучи знакомыми с комбинаторикой, вы заметите, что это будет 3! повторений, но что это значит для нас?   
Во-первых, эти повторения увеличивают количество вычислений, а так же создают помеху в виде еще 5 строчек, которые никак не продвигают наше решение.

Чтобы найти закономерность и понять, как избавиться от излишних операций, потребовалось самому начать суммировать квадраты чисел, в пределах однозначных чисел. Проделав эту работу, я пришел к умозаключению, что перебор чисел где:

1-ое число: a  
2-ое число: a+1  
3-ье число: a+1+1

Будет выдавать всегда различные последовательности чисел, и не выдаст повторяющихся строчек, где лишь заменены числа местами, таким образом, вместо перебора 6 вариантов, мы находим 1 и останавливаемся, а также удовлетворяем условию нашей задачи, каждое число есть не повторяемое.

Итак, от перебора в «лоб» мы с помощью анализа задачи пришли к более элегантному решению.  
Изначально у нас было 100^9 вычислений, дальше, с помощью анализа мы добились 100^3 вычислений, вспомнив условие того, что числа не повторяются мы достигли минимального значения в 156 849 вычислений.  
Подытожу из 1.000.000.000.000.000.000 вычислений мы пришли к 156 849.  
Выдающийся результат, на данный момент это максимальное упрощение к которому я смог прийти, следующий материал работы будет посвящен решению проблемы понимания машиной квадрата, так как на данном этапе, это просто строки, которые не всегда могут образовывать наш квадрат.

**Проблема понимания машиной**

Мы научились находить строки из 3-х чисел, удовлетворяющих нашим условиям, но как научить ЭВМ понимать, возможно ли собрать из полученных данных квадрат?

Чтобы решить это, нам потребуется использовать метод, к которому однажды уже обращались, - решать самому, начиная решать самому и выписывая квадрат построчно, можно начать замечать, что каждое число встречается дважды, то есть на пересечении строки и столбца.

И это верно, выставляя условие ЭВМ, что каждое число строки встречается дважды, в самой этой строке и в еще одной из строк, мы будем получать только строки, в которых значения связаны с другими строками, а значит могут образовать квадрат.

Это чем-то похоже на принцип решета Эратосфена, мы так же, будем удалять строки 3х чисел, если хотя бы одно из них не повторяется дважды, оставляя только те, которые повторяются два и более раз.

**Заключение**

В заключении хотелось бы сказать, что без последовательного анализа поставленной задачи, велик шанс выбрать неверный путь её решения, самым примитивным способом анализа является решение на бумаге, когда мы начинаем самостоятельно решать задачу, неосознанно или осознанно появляется желание искать закономерности, чтобы вручную все не перебирать, иначе, приступая сразу к ЭВМ, можно зациклиться на мнении «Машины у нас мощные, быстро пересчитает», но это, увы, не так. Далее в «результат работы алгоритма», я продемонстрирую все мною найденные магические квадраты.

**Результат работы алгоритма.**

Результаты поражают, ответ выдается почти без задержек, что не может не радовать, и по итогу мы нашли 20(25) квадратов:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 02 | 252 | 602 |  | 0 | 625 | 3600 | 4225 |
| 392 | 482 | 202 |  | 1521 | 2304 | 400 | 4225 |
| 522 | 362 | 152 |  | 2704 | 1296 | 225 | 4225 |
|  |  |  |  | 4225 | 4225 | 4225 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 02 | 402 | 752 |  | 0 | 1600 | 5625 | 7225 |
| 512 | 602 | 322 |  | 2601 | 3600 | 1024 | 7225 |
| 682 | 452 | 242 |  | 4624 | 2025 | 576 | 7225 |
|  |  |  |  | 7225 | 7225 | 7225 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 52 | 542 | 782 |  | 25 | 2916 | 6084 | 9025 |
| 302 | 752 | 502 |  | 900 | 5625 | 2500 | 9025 |
| 902 | 222 | 212 |  | 8100 | 484 | 441 | 9025 |
|  |  |  |  | 9025 | 9025 | 9025 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 92 | 462 | 782 |  | 81 | 2116 | 6084 | 8281 |
| 622 | 542 | 392 |  | 3844 | 2916 | 1521 | 8281 |
| 662 | 572 | 262 |  | 4356 | 3249 | 676 | 8281 |
|  |  |  |  | 8281 | 8281 | 8281 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 82 | 512 | 962 |  | 64 | 2601 | 9216 | 11881 |
| 692 | 722 | 442 |  | 4761 | 5184 | 1936 | 11881 |
| 842 | 642 | 272 |  | 7056 | 4096 | 729 | 11881 |
|  |  |  |  | 11881 | 11881 | 11881 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 12 | 382 | 862 |  | 1 | 1444 | 7396 | 8841 |
| 462 | 792 | 222 |  | 2116 | 6241 | 484 | 8841 |
| 822 | 342 | 312 |  | 6724 | 1156 | 961 | 8841 |
|  |  |  |  | 8841 | 8841 | 8841 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 22 | 312 | 94 |  | 4 | 961 | 8836 | 9801 |
| 492 | 822 | 262 |  | 2401 | 6724 | 676 | 9801 |
| 862 | 462 | 172 |  | 7396 | 2116 | 289 | 9801 |
|  |  |  |  | 9801 | 9801 | 9801 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 582 | 142 | 792 |  | 3364 | 196 | 6241 | 9801 |
| 312 | 862 | 382 |  | 961 | 7396 | 1444 | 9801 |
| 742 | 472 | 462 |  | 5476 | 2209 | 2116 | 9801 |
|  |  |  |  | 9801 | 9801 | 9801 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 112 | 232 | 712 |  | 121 | 529 | 5041 | 5691 |
| 432 | 592 | 192 |  | 1849 | 3481 | 361 | 5691 |
| 612 | 412 | 172 |  | 3721 | 1681 | 289 | 5691 |
|  |  |  |  | 5691 | 5691 | 5691 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 12 | 282 | 762 |  | 1 | 784 | 5776 | 6561 |
| 442 | 642 | 232 |  | 1936 | 4096 | 529 | 6561 |
| 682 | 412 | 162 |  | 4624 | 1681 | 256 | 6561 |
|  |  |  |  | 6561 | 6561 | 6561 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 22 | 432 | 742 |  | 4 | 1849 | 5476 | 7329 |
| 592 | 582 | 222 |  | 3481 | 3364 | 484 | 7329 |
| 622 | 462 | 372 |  | 3844 | 2116 | 1369 | 7329 |
|  |  |  |  | 7329 | 7329 | 7329 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 832 | 432 | 592 |  | 6889 | 1849 | 3481 | 12219 |
| 732 | 312 | 772 |  | 5329 | 961 | 5929 | 12219 |
| 12 | 97 | 532 |  | 1 | 9409 | 2809 | 12219 |
|  |  |  |  | 12219 | 12219 | 12219 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 22 | 342 | 532 |  | 4 | 1156 | 2809 | 3969 |
| 432 | 382 | 262 |  | 1849 | 1444 | 676 | 3969 |
| 462 | 372 | 222 |  | 2116 | 1369 | 484 | 3969 |
|  |  |  |  | 3969 | 3969 | 3969 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 42 | 232 | 522 |  | 16 | 529 | 2704 | 3249 |
| 322 | 442 | 172 |  | 1024 | 1936 | 289 | 3249 |
| 472 | 282 | 162 |  | 2209 | 784 | 256 | 3249 |
|  |  |  |  | 3249 | 3249 | 3249 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 32 | 262 | 662 |  | 9 | 676 | 4356 | 5041 |
| 462 | 512 | 182 |  | 2116 | 2601 | 324 | 5041 |
| 542 | 422 | 192 |  | 2916 | 1764 | 361 | 5041 |
|  |  |  |  | 5041 | 5041 | 5041 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 82 | 642 | 672 |  | 64 | 4096 | 4489 | 8649 |
| 532 | 522 | 562 |  | 2809 | 2704 | 3136 | 8649 |
| 762 | 432 | 322 |  | 5776 | 1849 | 1024 | 8649 |
|  |  |  |  | 8649 | 8649 | 8649 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 292 | 472 | 882 |  | 841 | 2209 | 7744 | 10794 |
| 682 | 672 | 412 |  | 4624 | 4489 | 1681 | 10794 |
| 732 | 642 | 372 |  | 5329 | 4096 | 1369 | 10794 |
|  |  |  |  | 10794 | 10794 | 10794 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 72 | 412 | 912 |  | 49 | 1681 | 8281 | 10011 |
| 612 | 772 | 192 |  | 3721 | 5929 | 361 | 10011 |
| 792 | 492 | 372 |  | 6241 | 2401 | 1369 | 10011 |
|  |  |  |  | 10011 | 10011 | 10011 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 62 | 622 | 872 |  | 36 | 3844 | 7569 | 11449 |
| 732 | 662 | 422 |  | 5329 | 4356 | 1764 | 11449 |
| 782 | 572 | 462 |  | 6084 | 3249 | 2116 | 11449 |
|  |  |  |  | 11449 | 11449 | 11449 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 62 | 272 | 742 |  | 36 | 729 | 5476 | 6241 |
| 382 | 662 | 212 |  | 1444 | 4356 | 441 | 6241 |
| 692 | 342 | 182 |  | 4761 | 1156 | 324 | 6241 |
|  |  |  |  | 6241 | 6241 | 6241 |  |

**Ошибки алгоритма.**

Ничего нет идеального и даже этот хорошо продуманный алгоритм выдал ошибку последующие суммы не выходит собрать в магический квадрат, но кто не ищет, тот не найдет, попробуйте и вы собрать их самостоятельно.

*Сумма = 10150*

6 33 95

6 67 75

15 30 95

15 58 81

30 67 69

33 50 81

45 50 75

45 58 69

*Сумма = 5886*

2 29 71

2 49 59

7 19 74

7 46 61

11 17 74

11 49 58

17 46 59

19 22 71

22 41 61

29 41 58

*Сумма = 5574*

2 23 71

2 43 61

7 22 71

7 41 62

19 37 62

19 43 58

22 37 61

23 41 58

*Сумма = 7461*

1 8 86

1 58 64

4 7 86

4 46 73

7 44 74

8 34 79

14 32 79

14 44 73

31 32 74

31 56 58

34 47 64

46 47 56

*Сумма = 9246*

7 19 94

7 61 74

11 17 94

11 49 82

17 59 74

19 62 71

29 41 82

29 58 71

41 61 62

49 58 59